VON OPERATIVEN MODELLEN DER AXIOMATISCHEN MENGENLEHRE

EDUARD WETTE

Philosophisches Seminar der Universität Kiel

Ich skizziere einen Weg, auf dem nach meinem Ermessen bewiesen werden kann, daß die generelle Kontinuumhypothese (Kh) und das Auswahlaxiom (Aw) formal unentscheidbar sind in einer Kodifikation der Zermeloschen Mengenlehre ($\mathfrak{M}_Z$) mit beziehungsweise ohne Auswahlaxiom, daß also

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{Kh}(\rightarrow \mathrm{Aw}) \\ \neg\,\mathrm{Kh} \wedge \mathrm{Aw} \\ \neg\,\mathrm{Aw} \end{array}\right\} \wedge\, \mathfrak{M}_Z \text{ [1]}$$

erfüllbar sind. Dabei beziehe ich mich auf die axiomatische Mengenlehre nach von Neumann/Bernays und im einzelnen auf formale Unabhängigkeit von den Axiomen der Gruppen A bis D aus Gödels Monographie 1940 [1], abgesehen von der Abschwächung des Fraenkelschen Ersetzungsaxioms C 4 zum Zermeloschen Aussonderungsaxiom (As):

$$\mathfrak{M}_Z \rightleftharpoons \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}\,1, 2, 3 \wedge \mathrm{As} \wedge \mathrm{D}.$$

Mein Plan geht auf Modelle aus, die nicht der axiomatischen Mengenlehre selbst entspringen [2]). Anlaß zur Suche nach einem externen Modell für die kodifizierte Zermelosche Mengenlehre bietet das Problem ihrer formalen Widerspruchsfreiheit. Wenn ein mengentheoretisches Axiomensystem dieser Art erfüllbar ist, dann ist es nach dem Skolemschen Relativitätssatz auch im Abzählbaren erfüllbar. Dies führt zu der Spekulation, daß die Axiome auch erfüllt werden könnten ohne irgendeine Berufung auf jene Vor-

---

[1]) Symbolik, abgesehen von der Punktation bei Quantoren (vgl. [4])), wie [3].

[2]) Durch das Fundierungsaxiom D, das restrictive axiom bei Bernays, ist die Fragestellung scharf zugespitzt. Vgl. auch die internen Resultate, die Mostowski 1939 und Specker 1952 erzielt haben.

stellung von einer Analogie des Unendlichen zum Endlichen, auf die sich die ursprünglich intendierte Interpretation der Axiome gründet.

Wegweisend auf der Suche nach einer Umdeutung mengentheoretischer Axiomensysteme, die sich strikt an die Auffassung vom Unendlichen als etwas Potentiellem hält, ist einerseits Gentzens Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein Kodifikat der Arithmetik, andererseits Lorenzens operative Einstellung zum Prozeß mathematischen Definierens und Beweisens. Lorenzen gelingt es, Satz für Satz eine operative Umdeutung der praktisch relevanten Teile der Analysis vorzunehmen [3]. Lorenzens Begriffsmodifikationen, die auf 'primäre' beziehungsweise 'quasiprimäre' Einschränkung der Aussagemittel seiner 'elementaren Sprachschichten' zugeschnitten sind [3]), und überhaupt solchen, die explizit definiert sind in bezug auf eine begrenzte Iteration selbst induktiv definierter Schichten, bleiben jedoch schon gewisse Sätze im Grenzgebiet zwischen Analysis und Ordinalzahltheorie unzugänglich, zum Beispiel der Cantor-Bendixsonsche Satz über abgeschlossene Mengen.

Im Laufe meiner Versuche, diesen Satz und darüber hinaus den Konfinalitätscharakter von Ordinalzahlen höherer Zahlklassen mit einer neuen Begriffsmodifikation umzudeuten, die induktiv definiert ist und die sich innerhalb jeder (alten) Schicht einschränkend auswirkt, bin ich nun auf ein operatives Modell der axiomatischen Mengenlehre gestoßen.

Die Errichtung eines passenden Rahmens für ein solches Modell, eine hinreichend umfassende operative Ordinalzahltheorie, vollführe ich in drei Etappen. Die Definition des Modells erfolgt in zwei weiteren Etappen, und diese beiden Etappen können dann (im selben Rahmen) so abgewandelt werden, daß sich die eingangs genannten Unabhängigkeiten ergeben. Während die erste Etappe eine bloß vorbereitende Rolle spielt, sind die übrigen konstitutiv an der schließlichen Modellkonstruktion beteiligt.

Vorweg will ich noch bemerken, daß ich im Verfolg des operativen Rahmens am Ende dahin gelangt bin, für jedes Entwicklungsstudium des operativ-inhaltlich Gemeinten ein Kodifikat aufzustellen.

---

[3]) '...' bezieht sich auf in [3] erklärte Begriffe.

I. Ohne Orientierung an der naiven Theorie der II. Zahlklasse ist es nicht leicht, einen genügend ausdrucksreichen Ansatz für die Sprachkonstruktion aufzufinden, die einer Schichtiteration zugrunde liegen soll. Im Hinblick auf Anwendungen bei induktiven Definitionen, die im allgemeinen einen beliebig verzweigten Regreß von definienda zu definientes besitzen, gehe ich nicht von den Wohlordnungen der Menge der Grundzahlen 1, 2, 3, ... aus, sondern von den Fundierungen. Eine binäre Relation R zwischen Grundzahlen heiße *fundierend*, wenn unter Benutzung der Abkürzungen

$$m \overset{R}{<} n \rightleftharpoons mRn \wedge \neg nRm$$

$$I(\prec ; \pi(m)) \rightleftharpoons \bigwedge_{m_0} \bigwedge_m m \prec m_0 \rightarrow \pi(m) . \rightarrow \pi(m_0) . \rightarrow \pi(m) \text{ [4]}$$

für $\overset{R}{<}$ die Vorgängerinduktion $I(\overset{R}{<} ; \pi(m))$ gilt:

$$\mathrm{fd}(R) \rightleftharpoons \vdash I(\overset{R}{<} ; \pi(m)) \text{ [5]}.$$

Fundierende Relationen brauchen keinerlei Eigenschaften totaler Ordnungen zu haben.

Um Ordinalzahlen aus fundierten Mengen statt aus wohlgeordneten zu abstrahieren, ist es auch ohne jeden operativen Hintergedanken schon vom naiven Standpunkt aus nicht ratsam, eine verwickelte Abschwächung des Isomorphiebegriffs anzugeben derart, daß Ordinalzahlen als Klassen abgeschwächt isomorpher fundierter Mengen herauskommen. Vielmehr empfiehlt es sich, einen derartigen Isomorphismus, falls er existiert, induktiv herzustellen. Ich definiere einen Niveauvergleich zwischen zwei fundierenden Relationen R und S folgendermaßen durch Vorgängerinduktion:

$$m_0 \, {}^R\!\leqslant^S n_0 \leftrightarrow \bigwedge_{\substack{m \\ \overset{R}{<} m_0}} \bigvee_{\substack{n \\ \overset{S}{<} n_0}} m \, {}^R\!\leqslant^S n.$$

Bezeichnet noch $\underline{R}$ das Feld von R $(m \in \underline{R} \rightleftharpoons \bigvee_n mRn \vee nRm)$, dann liefert mir

$$R \leqslant S \rightleftharpoons \bigwedge_{\substack{m \\ \in \underline{R}}} \bigvee_{\substack{n \\ \in \underline{S}}} m \, {}^R\!\leqslant^S n$$

---

[4]) Punkte auf der Zeile bezeichnen das Ende der Wirkungsbereiche von Quantoren. Welcher Quantor zu einem bestimmten Punkt gehört, ergibt sich schrittweise von den innersten zusammengehörigen Paaren ausgehend. Punkte am Formelende werden unterdrückt.

[5]) Im Hinblick darauf, daß unter II. die Definition fundierender Relationen von der kodifikativen Ableitung der Vorgängerinduktion ausgeht, schreibe ich schon hier $\vdash$ und kann es dann unterlassen, π und m zu binden

sogleich die natürliche Halbwohlordnung $\leqslant$ zwischen fundierenden Relationen, welche der natürlichen Wohlordnung zwischen den von ihnen dargestellten Ordinalzahlen entspricht:

$$R \leqslant S \wedge S \leqslant T \rightarrow R \leqslant T, \quad \rightarrow R \leqslant S \vee S \leqslant R, \quad I(<\,;\Pi(R)).$$

Diese naive Durchgangsetappe enthält, obwohl durch den Niveauvergleich ${}^{R}\leqslant^{S}$ der Vorgriff auf die Gesamtheit aller binären Relationen zwecks Abstraktion von Ordinalzahlen beseitigt ist, selbstverständlich deutlich imprädikative Rückstände: 1. gehen in die Definition für fundierende Relationen „beliebige" Eigenschaften $\pi(m)$ ein; 2. repräsentieren „alle" fundierenden Relationen zwischen Grundzahlen, über die in $I(<\,;\Pi(R))$ quantifiziert wird, die Ordinalzahlen der gesamten naiven II. Zahlklasse.

II. Der erste Schritt zur Überführung der naiven Etappe I in eine operative Theorie besteht in der Konstruktion einer geeigneten Sprache $\mathfrak{S}$ über Grundzahlen. Lorenzens 'elementare' Sprache ist ungeeignet, weil dort mit je zwei Relationen R und S zwischen Grundzahlen, welche 1. durch Aussageformen aus $\mathfrak{S}$ darstellbar und 2. durch Beweise aus $\mathfrak{S}$ als fundierend erkennbar sind, die Aussageform $m\,{}^{R}\leqslant^{S} n$ und die Aussage $R \leqslant S$ nicht zu $\mathfrak{S}$ gehören würden.

In der Definition für ${}^{R}\leqslant^{S}$ wird von Paaren m_0, n_0 zurückgegriffen auf Paare m, n mit $m \overset{R}{<} m_0$ und $n \overset{S}{<} n_0$; die Vorgängerrelation, die ${}^{R}\leqslant^{S}$ so entspringt, kann daher erst dann als fundierend und also ${}^{R}\leqslant^{S}$ selbst erst dann als induktiv definiert erkannt werden, wenn R oder S schon als fundierend erkannt sind. Infolgedessen müssen die Beweismittel aus $\mathfrak{S}$, welche durch Ableitung von Vorgängerinduktionen zu Definitions- und Aussagemitteln aus $\mathfrak{S}$ führen, eben die Aussagemittel aus $\mathfrak{S}$ auch stets wieder umfassen.

Für eine in $\mathfrak{S}$ darstellbare Relation R, die in $\mathfrak{S}$ als fundierend erkennbar ist, muß die Vorgängerinduktion $I(\overset{R}{<}\,;\pi(m))$ überdies in folgendem Sinn „absolut" sichergestellt sein: $\pi(m)$ soll durch jede Aussageform $A(m)$ substituierbar sein, unabhängig davon, ob das Entwicklungsstadium von $\mathfrak{S}$, in dem $A(m)$ konkret erfaßt wird, später liegt als dasjenige, in welchem R darstellbar und $I(\overset{R}{<}\,;\pi(m))$ beweisbar wird. Diese Forderung läßt sich nur auf abstrakte Weise befriedigen, nämlich durch Kodifikate, die der

jeweiligen Entwicklung von $\mathfrak{S}$ angepaßt sind und worin neben jene Primformeln $\varrho(m, \ldots)$, welche im vorgängigen Abschnitt von $\mathfrak{S}$ schon definiert sind, abstrakte Symbole $\pi(m, \ldots)$ treten, welche keine bestimmte intendierte Interpretation haben, sondern unbestimmte Formelsymbole sind [6]).

Es läßt sich nun eine Sprachkonstruktion aufstellen, in der formale Aussage-, Definitions- und Beweismittel simultan so miteinander verkoppelt sind, daß die abgegrenzten Sprachmittel abgeschlossen sind gegenüber der Gruppe derjenigen logischen und definitorischen Operationen, welche in jenem Teil der Herleitungen aus Etappe I benötigt werden, der mit Mitteilungsvariablen für Relationen formulierbar ist und nicht, wie etwa $I(<; \Pi(R))$, auf freie und gebundene Relationsvariablen angewiesen ist. Diese Konstruktion bezeichne ich als *normale* Sprache über Grundzahlen; sie bildet den formalen Kern meiner Theorie. Es sei erwähnt, daß der Sinn, in dem die normale Sprache sich auf der ersten Stufe über Grundzahlen bewegt, den Rahmen axiomatischer Fixierungen der Stufentheorie, die nur explizite Definitionen benutzen, erheblich überschreitet; eine induktiv definierte Relation zwischen Grundzahlen wie ${}^{R}\leqslant^{S}$ ist im allgemeinen erst auf transfiniter Stufe einer expliziten Formulierung fähig.

Die Kodifikate für Abschnitte der normalen Sprache sowie ihre Vereinigung zum Kodifikat für die normale Sprache sind Kodifikate der Arithmetik, die sich vor den üblichen dadurch auszeichnen, daß induktiv definierte Relationen einkalkuliert werden, die nicht, von den Rechenrelationen ausgehend, mit Hilfe logischer Zusammensetzungen explizit darstellbar sind, also sogenannte nicht-arithmetische Relationen. Ungeachtet dieser Bezeichnung hat das Kodifikat für die normale Sprache mit den üblichen Kodifikationen der Arithmetik jedenfalls die formale Eliminierbarkeit des tertium-non-datur gemein: wiederum ist im Rahmen des kodifikativ Fixierten jeder klassische Beweis transformierbar in einen intuitionistischen Beweis für eine formale Übersetzung der Behauptung, die klassisch äquivalent und intuitionistisch stabil ausfällt.

III. Der zweite Schritt zur Überführung der naiven Etappe I in eine operative Theorie besteht darin, den Prozeß der Kon-

[6]) Vgl. [2], p. 263. Dort heißen derart aufzufassende „Symbole" letters; für die dortigen symbols können wir „Zeichen" sagen.

struktion einer normalen Sprache gemäß Etappe II zu iterieren und auf diese Weise zu einer immer höheren, aber stets begrenzten transfiniten Folge normaler Sprachschichten $\mathfrak{S}_\alpha$ aufzusteigen. $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ ist für $\alpha=0$ die normale Sprache über Grundzahlen und für $\alpha>0$ die normale Sprache über einem Bereich von Figuren, der die $\mathfrak{S}_\xi$ mit $\xi\leqslant\alpha$ formal umfaßt; $\mathfrak{S}_{\omega\cdot\alpha}$ ist für $\alpha=0$ der Bereich der Grundzahlen und für $\alpha>0$ die Vereinigung der $\mathfrak{S}_\xi$ mit $\xi<\omega\cdot\alpha$. Wie bei Lorenzens elementaren Schichten sind auch bei den normalen Schichten in $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ die Definition von $\mathfrak{S}_\alpha$ und eine umkehrbare Abbildung von $\mathfrak{S}_\alpha$ auf $\mathfrak{S}_0$ ausdrückbar.

Durch den iterierten „metamathematischen" Bezug, auf dem Abzählungen von $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{S}_2$, von $\mathfrak{S}_2$ in $\mathfrak{S}_3$, ... beruhen, werden Eigenschaften über Grundzahlen induktiv definierbar, die innerhalb des Rahmens der axiomatischen Mengenlehre nicht explizit darstellbar sind. Infolge der starken Axiome, die die Mengenbildung betreffen, ist freilich eine sehr weitgehende transfinite Schichtiteration nötig, ehe sich ihr Vorteil, neben der logischen Zusammensetzung auch den Prozeß der Definition primitiver Aussageformen formal zu berücksichtigen, so weit auswirkt, daß die axiomatische Mengenlehre eine vollständige Einbettung erfährt.

Wird aber auf eine Erfüllung des Fraenkelschen Ersetzungsaxioms einstweilen verzichtet zugunsten des schwächeren Zermeloschen Aussonderungsaxioms, so läßt sich ein ausreichender operativer Rahmen leicht angeben. Eine Ordinalzahl heiße in $\mathfrak{S}_\alpha$ darstellbar, wenn es eine sie repräsentierende fundierende Relation gibt, die in $\mathfrak{S}_\alpha$ darstellbar und in $\mathfrak{S}_\alpha$ als fundierend beweisbar ist. Bezeichnet σ_α den Limes der in $\mathfrak{S}_\alpha$ darstellbaren Ordinalzahlen ($\sigma_\alpha \rightleftharpoons \leqslant_\xi \bigwedge_{\substack{\eta \\ \mathfrak{S}_\alpha}} \eta\leqslant\xi$), so ist σ_α in $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ darstellbar. Um nun zu einer hinreichend hohen Schichtiteration zu gelangen, werden Regionen normaler Schichten konstruiert: $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{S}_{\sigma_1}$, $\mathfrak{R}_2=\mathfrak{S}_{\sigma_{\sigma_1}}$, $\mathfrak{R}_3=\mathfrak{S}_{\sigma_{\sigma_{\sigma_1}}}$, ...; die in $\mathfrak{R}_n$ darstellbaren Ordinalzahlen dienen also jeweils als Iterationsindizes für die Schichten der nächsten Region $\mathfrak{R}_{n+1}$. Alles weitere ist dann bereits innerhalb $\mathfrak{R}_3$ enthalten.

Der Übergang zur Iteration normaler Sprachschichten stellt uns auch vor die Frage, wie die induktive Definition der Sprachmittel einer Schicht beschaffen sein muß, damit die Definition unter Zuhilfenahme von Beweismitteln höherer Schichten nicht etwa mehr Sprachmittel erzeugt. Bei Aussageformen aus $\mathfrak{S}_\alpha$, die eine

fundierende Relation darstellen, ist ja im allgemeinen gerade zu unterscheiden zwischen Relationen, die irgendwoher fundierend sind, und Relationen, die mit den Beweismitteln aus $\mathfrak{S}_\alpha$ als fundierend erkennbar sind. Daß die Vorgängerinduktion für eine fundierende Relation eventuell erst auf definitorischen Umwegen beweisbar ist, rührt daher, daß die dort eingehenden generellen Implikationen keiner vollständigen formalen Fixierung fähig sind. Definitorische Umwege liefern jedoch keine neuen Erzeugnisse bei solchen induktiven Definitionen, bei denen die 'uneigentlichen' logischen Partikeln $\rightarrow$, $\bigwedge_x$, $\neg$, deren Einführung in operativer Sicht auf Grund einer Deutung erfolgt, nicht in die logische Zusammensetzung der definientes der Definition oder der an ihrem definitorischen Stammbaum beteiligten Definitionen (für „vorgängige" Relationen) eingehen. Der Bezirk der induktiven Definitionen, der sich auf ausschließlich mit den 'eigentlichen' logischen Partikeln $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ zusammengesetzten definientes aufbaut, entspricht, von entscheidbaren Primformeln ausgehend, dem finitären Definieren. Den Prozeß des Operierens nach eigentlichen Regeln vermögen die kodifizierten Beweismittel allerdings nicht unmittelbar wiederzugeben, denn sie bringen uneigentliche Regeln, zum Beispiel 'Inversionen', ins Spiel [7]); dagegen erfolgt die operative Einführung der eigentlichen logischen Partikeln mit Hilfe definierender Regeln, die im Zusammenhang mit eigentlichen Regeln eigentlich bleiben [8]). Sollen kodifiziertes Ableiten und intuitives Operieren nach eigentlichen Regeln wenigstens mittelbar übereinstimmen, so wird es nötig, sich auf den intuitionistischen Logikkalkül zu beschränken.

IV. Es geht jetzt darum, die Axiome der Zermeloschen Mengenlehre im Rahmen von $\mathfrak{R}_3$ tatsächlich zu erfüllen. Zu dem Zweck weise ich zuerst innerhalb desjenigen Abschnitts der naiven II. Zahlklasse, welcher im operativen Rahmen von $\mathfrak{R}_1$ liegt und also durch σ_{σ_1} begrenzt wird, einen Zugang zu einer Umdeutung höherer Zahlklassen auf.

Um den Konfinalitätscharakter von Limeszahlen wie ω_1, $\omega_1+\omega$, $\omega_1+\omega_1$, $\omega_1\cdot\omega$, ... (und übrigens auch über die mit dem Aussonderungsaxiom nicht erreichte Grenze ω_ω hinaus) im Abgezählten herauszuformen, definiere ich induktiv eine Einschränkung der nor-

---

[7]) Vgl. [3], etwa S. 60.

[8]) Vgl. [3], S. 79 und S. 172.

malen Sprachmittel, die sich durch alle normalen Schichten hindurch auswirkt. Ausgehend von der natürlichen Wohlordnung der Ordinalzahlen als einer Grundaussageform, die sich in jede normale Schicht zwangsläufig fortsetzt, werden neue Schichten $^*\mathfrak{S}_\beta$ von Aussage-, Definitions- und Beweismitteln konstruiert, die ebenfalls beliebig hoch fortsetzbar sind. Diese Schichten bezeichne ich als *expansible* Schichten; sie bilden den technischen Kern meiner Gedankengänge. Die Ausdehnung der $^*\mathfrak{S}_\beta$ in normalen Schichten hängt von dem Ordinalzahlabschnitt ab, auf den sich die expansible Grundaussageform $\xi \leqslant \eta$ jeweils erstreckt; $^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha$, die expansible Schicht von der Höhe β über dem durch σ_α begrenzten Ordinalzahlabschnitt, ist ein (echter) Teil der normalen Schicht $\mathfrak{S}_{\alpha+\beta}$. Für den verfolgten Zweck genügen $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ mit γ und β aus $\mathfrak{R}_1$.

Relativ zu den expansiblen Aussagemitteln werden nun die normalen Möglichkeiten, $\mathfrak{S}_\alpha$ in $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ abzuzählen, aufgehoben, weil eine von außen in normale Ordinalzahldarstellungen eindringende Beziehung eben nicht fortsetzbar ist. Immerhin bleiben noch expansible Möglichkeiten, $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ durch umkehrbare Abbildung auf Ordinalzahlen „auszuzählen", bestehen. Am wichtigsten aber ist, daß infolge der Eigenart expansibler Sprachmittel, induktiv auf normale transfinite Induktionen aufgestockt zu sein, äußerst kräftige induktive Beweismitel verfügbar werden.

In entfernter Anlehnung an Dedekind läßt sich zuerst ein Reduktionslemma beweisen, demzufolge die Aussagemittel aus $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ (mit γ, β aus $\mathfrak{R}_1$) explizit umgeformt werden können in solche aus reduzierten expansiblen Schichten $'^*\mathfrak{S}_{\beta'}/^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ (mit β' aus $\mathfrak{R}_2$), die sich über den Figuren von $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ erheben:

$$\bigwedge_{^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha}{}_A \quad \bigvee_{'^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+\beta}}/^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha}{}_B \quad A \leftrightarrow B.$$

An Hand dieser Reduktion komme ich dann zu einem Limitationslemma, welches besagt, daß die Limeszahlen $\sigma_{\alpha+1}$ relativ zu expansiblen Aussageformen $^*A(\xi, \eta)$ Anfangszahlcharakter haben:

$$\bigwedge_{<\sigma_{\alpha+1}}{}_\xi \bigvee_{<\sigma_{\alpha+1}}{}_\eta {}^*A(\xi,\eta) \,..\rightarrow \bigwedge_{<\sigma_{\alpha+1}}{}_{\xi_0} \bigvee_{<\sigma_{\alpha+1}}{}_{\eta_0} \bigwedge_{<\xi_0}{}_\xi \bigvee_{<\eta_0}{}_\eta {}^*A(\xi,\eta).$$

In Anlehnung an Gödel ergibt sich nunmehr ein Komprehensionslemma, das expansible Aussageformen über Ordinalzahlen in einem begrenzten (nur vom zugrunde liegenden Ordinalzahlabschnitt

abhängigen) expansiblen Schichtabschnitt darstellen lehrt:

$$\bigvee_{{}^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+1}}/\sigma_\alpha} {}_B \bigwedge_{\mathfrak{S}_\alpha} {}_\xi \, {}^*A \leftrightarrow B.$$

Und all dies führt zum Potenzmengensatz: jede expansibel darstellbare Untermenge einer expansibel darstellbaren Menge ist in einem begrenzten, nur vom zugrunde liegenden Ordinalzahlabschnitt und von der Darstellungshöhe der Menge (aber nicht der Untermenge!) abhängigen expansiblen Schichtabschnitt darstellbar:

$${}^*N \subseteq {}^*M \leftarrow {}^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha \rightarrow {}^*N \leftarrow {}^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+\beta}}/\sigma_\alpha \text{ [9]}.$$

Schon im Anschluß an das Komprehensionslemma läßt sich eine expansible Umdeutung der Anfangszahlen induktiv definieren:

$$\overset{*}{\omega}_\alpha = \leqslant_{\zeta_0} \bigwedge_{\substack{\zeta \\ <\alpha}} \zeta_0 \geqslant \leqslant_{\zeta_0} \bigwedge_{\substack{A \\ {}^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+1}}/\sigma_\alpha}} \bigwedge_{\substack{\xi \\ <\zeta_0}} \bigvee_{\substack{\eta \\ <\zeta_0}} A \ldots \rightarrow \bigwedge_{\substack{\xi_0 \\ <\zeta_0}} \bigvee_{\substack{\eta_0 \\ <\zeta_0}} \bigwedge_{\substack{\xi \\ <\xi_0}} \bigvee_{\substack{\eta \\ <\eta_0}} A.$$

Aus dem Limitationslemma folgt $\overset{*}{\omega}_\xi \leqslant \sigma_\xi$, und der Potenzmengensatz kann dann zum Kontinuumsatz $2^{\overset{*}{\aleph}_\xi} = \overset{*}{\aleph}_{\xi+1}$ verschärft werden. (Einen Beweis für $\sigma_\xi \leqslant \overset{*}{\omega}_\xi$ habe ich nicht erzielt.)

V. Auf der Ebene von Etappe IV ließe sich bereits eine Satz für Satz erfolgende Umdeutung der Mengenlehre durchführen. Um jedoch sofort die Axiome zu verifizieren, wird noch eine letzte Etappe V erforderlich, und zwar schon in Anbetracht des Umstandes, daß die axiomatische Mengenlehre jede Ordinalzahl α mit der Menge W_α aller Ordinalzahlen, die $<\alpha$, identifiziert, während unter I. und III. α durch die natürliche Anordnung der Menge W_α lediglich repräsentiert wird. Damit Elemente, die keine Mengen sind, fortfallen, deute ich die Grundbegriffe „Klasse", „Menge", „Elementrelation" der axiomatischen Mengenlehre im Rahmen solcher Mengen, die in expansiblen Schichten ${}^*\mathfrak{S}_\beta/0$ über dem durch 0 begrenzten leeren Ordinalzahlabschnitt darstellbar sind. Das Modell des Bereichs der „Klassen" unterscheidet sich von dem des Bereichs der „Mengen" bloß insofern, als die Fundierung durch die Elementrelation die Ordinalzahlen $\overset{*}{\omega}_\omega + 1$ beziehungsweise $\overset{*}{\omega}_\omega$ darstellt.

---

[9]) $\leftarrow$ statt „darstellbar in".

IV′. V′., IV″. V″. Der am Beispiel dieser „reinen" Expansibilitätstheorie gewonnene Einblick in die Automatik der Mengenlehre führt im Verein mit der Flexibilität ihres derart tief umgeflügten Fundaments schließlich auch dazu, durch externe Modelle die erwarteten Unabhängigkeiten nachzuweisen. Dazu sind Eingriffe in die rein-expansiblen Definitionsmittel vorzunehmen, aber selbstverständlich solche Eingriffe, die im Hinblick auf Potenzmengen- und Aussonderungsaxiom nicht die rein-expansible Möglichkeit zerstören, imprädikative Definitionsverfahren durch induktive Definitions- und Beweismittel zu rechtfertigen; in die freie logische Zusammensetzbarkeit rein-expansibler Aussagemittel darf mit Rücksicht auf die Axiome der Gruppe B keinerlei Eingriff erfolgen.

Eine Vergrößerung der Kardinalzahl der Menge aller rein-expansibel darstellbaren reellen Zahlen wird durch Hereinnahme von normalem Aussagematerial in die Konstruktion neuer „gemischt"-expansibler Schichten besorgt; und auch nur in normalen Schichten sind die Abzählungsmöglichkeiten vorhanden, die ja unumgänglich sind, um im Vergleich zu rein-expansibel darstellbaren reellen Zahlen „höhere" reelle Zahlen darzustellen. Wie aber wird verhindert, daß infolge der Aussagemöglichkeiten, die aus normalen Schichten herangezogen werden, sich in der normalen Ordinalzahlskala gleichzeitig auch die gemischt-expansiblen Anfangszahlmarken gegenüber den rein-expansiblen vergrößern? Zu dem Zweck brauche ich die Konstruktion gemischt-expansibler Schichten lediglich so einzurichten, daß 1. in den herangezogenen normalen Aussageformen frei nur Variablen für Grundzahlen vorkommen und daß 2. solche normalen Aussageformen über Grundzahlen nur in explizite gemischt-expansible Definitionen eingehen, während in induktive Definitionen ausschließlich (quantifikativ geschlossene) normale Aussagen hereingenommen werden dürfen.

Im Unterschied zu den Lemmata und zum Potenzmengensatz unter IV. überträgt sich die Eigenschaft rein-expansibler Schichten, rein-expansibel mit Ordinalzahlen auszählbar zu sein, nicht ohne weiteres sinngemäß auf gemischt-expansible Schichten. Mit induktiven Definitionen im expansiblen Rahmen ist nämlich nicht ohne weiteres (wie im normalen Rahmen) die Abbildung von den Aussageformen über Grundzahlen, die fundierende Relationen zwischen Grundzahlen darstellen, auf die durch diese dargestellten Ordinal-

zahlen zu erzielen – auch wenn schon die umkehrbare Abbildung von den Grundzahlen auf die finiten Ordinalzahlen herangezogen ist.

Auf solche Weise gabeln sich die möglichen gemischt-expansiblen Abwandlungen der rein-expansiblen Etappen IV und V in zwei Varianten. In der einen Variante (′) bleibt das Prinzip expansibler Auszählbarkeit erhalten, und im Rahmen gemischt-expansibler Schichten über dem Leeren wird dann das Auswahlaxiom zusammen mit der Kontinuumsatzschar

$$2^{\aleph_\xi} = \begin{cases} \aleph_{\alpha+1} \leftarrow \xi \leqslant \alpha \\ \aleph_{\xi+1} \leftarrow \xi \leqslant \alpha \end{cases}$$

beweisbar, die für $\alpha > 0$ die Lusinsche Hypothese erfüllt. In der anderen Variante (″) wird das Prinzip expansibler Auszählbarkeit verletzt, und dies wiederum führt im Rahmen gemischt-expansibler Schichten über dem Leeren zur Widerlegung des Auswahlaxioms, weil innerhalb des externen Modells keine Abbildung aus der Menge der Ordinalzahlen in die Menge der reellen Zahlen das reelle Kontinuum ausschöpft.

Von dem skizzierten Programm sind die beiden ersten Etappen ausgearbeitet. Die Ausarbeitung der anderen Etappen hoffe ich an Hand der angesammelten Entwürfe ohne Unterbrechung durchführen zu können.

Der Gegensatz zwischen freier Wahl und Gesetz, den die intuitionistische Mathematik bei willkürlichen und einzelnen reellen zahlen aufgedeckt hat, scheint demnach im Rahmen dessen, was die axiomatische Mengenlehre von den naiven Intentionen wirklich festlegt, durch Aufweis eines hinreichend umfassenden Bezirks arithmetischer Gesetze einer dialektischen Synthese zuzuführen zu sein. Unsere Anschauung vom Kontinuum hat sich aber nicht nur auf dem einen Flügel der Mathematik mit dem, was gemeinsam hinter Arithmetik und Logik steht, auseinanderzusetzen, sondern auf dem anderen Flügel der Mathematik auch mit dem, was gemeinsam zwischen Geometrie und Physik zu suchen sein könnte.

Dies ist, abgesehen von stilistischen Verbesserungen und von einigen Zusätzen in dem durch IV′. V′., IV″. V″. gekennzeichneten Abschnitt, der Text eines Vortrags, den ich am 27. August 1957 gehalten habe anläßlich des Kolloquiums „Constructivity in Mathematics", das in Amsterdam für

die International Union of Logic, Philosophy and Methodology of the Sciences veranstaltet worden ist.

Allergrößten Dank schulde ich meinem Lehrer, Prof. P. Lorenzen, der mir 1951 eine „konstruktive" Ordinalzahltheorie als Arbeitsfeld überlassen hat. Mit nicht zu ermüdender Geduld ist er seitdem den Ansätzen gefolgt, die ich aus der Hoffnung heraus, schließlich eine Auflösung des Kontinuumproblems zu finden, immer wieder verworfen und neu überarbeitet habe, und er hat meine Absicht durch viele Vereinfachungsvorschläge und manchen wertvollen Rat ständig unterstützt.

Ferner danke ich Prof. W. Krull, der das Unternehmen angesichts zunächst widerstrebender Meinungstendenzen gutgeheißen hat, ebenso Prof. Arnold Schmidt, der mir die Teilnahme an Kolloquien für mathematische Logik und Grundlagenforschung 1952/53/54 ermöglicht und mir so Zugang zu unterschiedlichen Grundauffassungen verschafft hat, und nicht zuletzt Prof. P. Bernays, der sich auf liebenswürdigste Weise mit mir während eines Austauschaufenthalts 1955/56 auseinandergesetzt und mich durch scharfsinnige, doch stets aufgeschlossene Kritik sowie durch manchen Hinweis gefördert hat, und auch Prof. B. L. van der Waerden, der mir zu der Frage, wie das Projekt in die Mathematik einzuordnen sei, Anregung vermittelt hat.

Der Vortrag selbst ist dadurch zustandegekommen, daß mir Prof. P. Lorenzen im Einverständnis mit Prof. A. Heyting einen großen Teil seiner Vortragszeit überlassen hat.

LITERATUR

[1] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Ann. Math. Studies 3, Princeton, 1940/51/53.

[2] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, New York, 1952.

[3] P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin, 1955.